

การศึกษาความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

โรงเรียนกาฬสินธุ์พิทยาสรรพ์

ปิยะธิดา แสงเสาร์, รมณรี นนทภา

นักศึกษาหลักสูตรครุศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ศึกษา คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม

อาจารย์สาขาวิชาคณิตศาสตร์ศึกษา คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม

E-mail: 638010160104@rmu.ac.th

บทคัดย่อ

การวิจัยครั้งนี้มีความมุ่งหมาย 1) เพื่อศึกษาความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนกาฬสินธุ์พิทยาสรรพ์ 2) เพื่อหาแนวทางการพัฒนาความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนกาฬสินธุ์พิทยาสรรพ์ กลุ่มตัวอย่างในการวิจัย ได้แก่ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนกาฬสินธุ์พิทยาสรรพ์ ในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2564 จำนวน 40 คน ซึ่งได้มาจากการสุ่มแบบกลุ่ม เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย คือ แบบทดสอบความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ระบบจำนวนจริง สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล ได้แก่ ร้อยละ ค่าเฉลี่ย ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน การวิเคราะห์เนื้อหา การวิเคราะห์งานเขียน และการบรรยายเชิงวิเคราะห์

ผลการศึกษาความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนกาฬสินธุ์พิทยาสรรพ์ พบว่า นักเรียนมีความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์โดยรวมมีค่าเฉลี่ย เท่ากับ 20 ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน เท่ากับ 14.14 คะแนนความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ 14 – 27 อยู่ในระดับปานกลาง (ร้อยละ 40) คะแนนความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ 0 – 13 อยู่ในระดับอ่อน (ร้อยละ 35) คะแนนความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ 28 – 40 อยู่ในระดับเก่ง (ร้อยละ 25) และ 2) แนวทางการพัฒนาความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนกาฬสินธุ์พิทยาสรรพ์ ที่มีคะแนนความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ 0 – 13 อยู่ในระดับอ่อน พบว่า ครูควรให้นักเรียนได้มีการพูด อธิบายการแสดงวิธีการพิสูจน์โดยใช้สมบัติ ทฤษฎีบท และบทนิยาม ประกอบของตนเองกับครู เพื่อนร่วมชั้น และให้นักเรียนฝึกทำแบบฝึกหัดสม่ำเสมอ ครูแสดงตัวอย่างวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์อย่างละเอียด และที่มาที่ไปของวิธีทำให้ชัดเจน ต้องให้นักเรียนมีส่วนร่วมในการจัดการเรียนรู้ การอภิปรายโต้ตอบกัน และแสดงวิธีการพิสูจน์ได้ด้วยตนเอง

คำสำคัญ: การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์, แนวทางการพัฒนาความสามารถ

A Study of Mathematical Proving Ability of Mathayomsuksa 4 Students at kalasin Pittayasan School.

Piyatida Saensao, Ramnaree Nontapa

Master Student, Master of Education, Program in Mathematics Educational, Faculty of Education,
Maha Sarakham Rajabhat University

Assistant Professor, Ph.D., Lecturer in Mathematics Educational Program, Faculty of Education,
Maha Sarakham Rajabhat University

E-mail: 638010160104@rmu.ac.th

ABSTRACT

The objectives of this research were 1) to study mathematical proof ability of students in Mathayomsuksa 4 at Kalasin Pittayasan School 2) to find procedures to develop mathematical proof ability of students in Mathayomsuksa 4 at Kalasin Pittayasan School. The research sample consisted of 40 students in Mathayomsuksa 4 at Kalasin Pittayasan School studying in the second semester of the academic year 2021 by cluster random sampling. The research tool was the mathematical proof ability test on the real number system. The statistics used in the data analysis were percentage, mean, standard deviation, content analysis, task analysis and descriptive analysis.

The results of the research were as follows;

1. The students in Mathayomsuksa 4 at Kalasin Pittayasan School have the ability in mathematics proving as overall mean of 20 and standard deviations at 14.14.
2. Mathematical proof proficiency was found at moderate score it was 14 – 27 (40 percent) and weak score at 0 – 13 (35 percent) and high score at 28 – 40 (25 percent)
3. The procedures for developing mathematical proving abilities of Mathayomsuksa 4 students at Kalasin Pittayasan School with scores of 0 – 13 are at a weak level were as follows; The teachers should allow students to explain how to use theorem and definition in doing. The teacher provides detailed examples of mathematical proof methods and the origin of the method clearly. The teacher should allow students in the participation in interactive discussions and show you how to prove it.

Keywords: mathematical proof, procedures developing abilities

บทนำ

คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่มีลักษณะเป็นนามธรรม มีโครงสร้างประกอบไปด้วย คำนิยาม คำอธิบาย สัจพจน์จะต้องตรวจสอบให้ได้ข้อสรุปที่ได้มาตามลำดับ จากนั้นจึงสร้างทฤษฎีเพราะทฤษฎี บทนิยามทางคณิตศาสตร์เป็นการพิสูจน์ความจริงของข้อความทางคณิตศาสตร์หรือตรรกะบนพื้นฐานของสัจพจน์และทฤษฎี (American Heritage Dictionary, 2005, p. 78) ดังนั้นการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์จึงเป็นหัวใจสำคัญในการเรียน ดังที่ Hersh (1993, p. 392) ได้กล่าวว่า นักคณิตศาสตร์ให้ความสนใจต่อการพิสูจน์มากกว่าคุณค่าของผลลัพธ์ และถือว่าการพิสูจน์เป็นสิ่งจำเป็นจะละเว้นไม่ได้ และ Markel (1994, pp. 291 – 295) อธิบายว่า การพิสูจน์เป็นหัวใจสำคัญของคณิตศาสตร์ การสร้างทฤษฎีบท และการพิสูจน์ทฤษฎีบท เป็นหน้าที่ของนักคณิตศาสตร์ ส่วน Solow (2002, p. 1) เสนอว่า จุดมุ่งหมายสำคัญของนักคณิตศาสตร์ คือ การค้นพบความจริงทางคณิตศาสตร์ และการสื่อสารความจริงนั้น ๆ ผ่านการพิสูจน์ด้วยภาษาคณิตศาสตร์ เพราะภาษาคณิตศาสตร์มีความสำคัญส่วนการพิสูจน์ คือ วิธีการสื่อสารความจริง

กระทรวงศึกษาธิการตระหนักถึงความสำคัญของวิชาคณิตศาสตร์ จึงให้มีการจัดการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ในทุกระดับชั้น ตั้งแต่ระดับประถมศึกษาถึงระดับมัธยมศึกษา แต่การที่จะช่วยให้นักเรียนบรรลุเป้าหมายของการเรียนรู้นั้น โรงเรียนควรจัดกิจกรรมเสริมหลักสูตรคณิตศาสตร์ควบคู่ไปกับการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ด้วย เพื่อส่งเสริมให้นักเรียนมีโอกาสนำความรู้และประสบการณ์ทางคณิตศาสตร์ และปลูกฝังให้นักเรียนรู้จักคิด มีความรอบคอบ มีระเบียบ แบบแผน และรู้จักวิเคราะห์ปัญหาอย่างมีเหตุผล ตามที่ยุพิน พิพิธกุล (2545, น. 1) ได้กล่าวว่า คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่เกี่ยวกับการคิด และพิสูจน์อย่างมีเหตุผล คณิตศาสตร์เป็นภาษาอย่างหนึ่ง ซึ่งสามารถช่วยให้นักเรียนสามารถแก้ปัญหาที่ยากซับซ้อนได้ และประเสริฐ เสียงดี (2527, น. 1) อธิบายว่า การพิสูจน์เป็นกระบวนการที่สำคัญในวิชาคณิตศาสตร์ และต้องมีการพัฒนาที่เป็นจริงหรือสมเหตุสมผลจนยอมรับเป็นทฤษฎีทางคณิตศาสตร์ได้

ในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ทุกระดับนักเรียนต้องอ่าน ทำความเข้าใจ วิเคราะห์ แสดงความคิดเห็น การพิสูจน์ให้ได้ด้วยตนเอง เข้าใจและเห็นคุณค่าของการพิสูจน์ ด้วย อย่างไรก็ตามยังมีนักเรียนจำนวนมากมีปัญหาในการอ่าน การเขียน และการพิสูจน์ รวมถึงมีความคิดรวบยอดที่ผิดเกี่ยวกับการพิสูจน์ และเทคนิคในการพิสูจน์ (Saeed, 1997, pp. 4300 – A) มีงานวิจัยที่ได้กล่าวถึงปัญหาการพิสูจน์ของนักเรียน เช่น พิชากกร แปลงประสพโชค (2518, น. 2 – 5) พบว่า ในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 เป็นชั้นที่เริ่มเรียนการพิสูจน์อย่างมีแบบแผน ครูคณิตศาสตร์มักพบว่า นักเรียนเรียนวิชานี้ไม่รู้เรื่อง และพิสูจน์ไม่เป็น เช่น พิสูจน์โดยใช้เหตุและผลไปคนละทางบ้าง การนำสิ่งที่จะต้องพิสูจน์มาเป็นข้ออ้างบ้าง และแม้แต่นักเรียนเก่งก็มีปัญหาเพราะนักเรียนไม่สามารถแยกแยะได้เลยว่าข้อใดเป็นสิ่งที่ยอมรับ โดยไม่ต้องมีการพิสูจน์ และข้อใดเป็นสิ่งที่ต้องพิสูจน์เสียก่อน จึงจะนำไปใช้อ้างอิงในการพิสูจน์ข้อความต่าง ๆ นอกจากนี้เมื่อมีปัญหาในการพิสูจน์เกิดขึ้นแล้ว ก็ยังส่งผลต่อเจตคติของนักเรียนวิชาคณิตศาสตร์ด้วย ส่วนกาญจนา สนธิโพธิ์ (2527, น. 1) พบว่า เรื่องที่เป็นปัญหามากสำหรับนักเรียนที่เรียนวิชาเอกคณิตศาสตร์ คือ การพิสูจน์ นักเรียนไม่ทราบว่าจะเริ่มต้นการพิสูจน์อย่างไร และไม่ทราบว่าจะดำเนินการพิสูจน์ไปในแนวทางใด จึงจะบรรลุถึงสิ่งที่ต้องการจะพิสูจน์ ซึ่งสอดคล้องกับ กรรณิกา คล่องกิจกุล (2527, น. 1 – 2) ที่พบว่า ปัญหาสำหรับนักเรียนคือ นักเรียนไม่สามารถพิสูจน์เองได้ เพราะไม่ทราบแนวการพิสูจน์ นักเรียนไม่ทราบว่าจะเริ่มต้นการพิสูจน์อย่างไร ไม่สามารถเชื่อมโยงสิ่งที่มีอยู่ ทำให้ประสบปัญหาในเรื่องการเลือกรูปแบบการพิสูจน์ ส่วน Moore (1990, pp. 137 – 144) พบว่า ในการเรียนวิชาที่เป็นการพิสูจน์ นักเรียนประสบปัญหาในการอ่านและการเขียนการพิสูจน์ จากงานวิจัย ดังกล่าว แสดงว่าปัญหาในการเรียนการพิสูจน์ของนักเรียนมีความสำคัญเป็นอย่างยิ่ง เพราะจุดมุ่งหมายที่สำคัญของการเรียน การสอนคณิตศาสตร์คือ การสอนให้นักเรียนรู้จักคิดอย่างมีเหตุผล มีความสามารถในการพิสูจน์ ดังนั้นหากนักเรียนมีปัญหาในการเรียนการพิสูจน์ ย่อมส่งผลต่อการเรียนคณิตศาสตร์ และการพัฒนานตนเองอย่างแน่นอน

จากการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ของโรงเรียนกาฬสินธุ์พิทยาสรรพ์ สังกัดสำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษา เขต 24 พบว่า ครูยังเน้นการสอนแบบบรรยาย บอกให้รู้มากกว่าการให้นักเรียนได้คิดเอง กิจกรรมการเรียนรู้อย่างไม่หลากหลาย ส่งผลให้นักเรียนส่วนใหญ่ไม่ชอบเรียนวิชาคณิตศาสตร์ มีความสนใจในการเรียนคณิตศาสตร์น้อย ดังจะเห็นได้จากผลการทดสอบทางการศึกษาแห่งชาติขั้นพื้นฐาน (Ordinary National Educational Test : O – NET) ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 โรงเรียนกาฬสินธุ์พิทยาสรรพ์ ปีการศึกษา 2562 และ 2563 ได้คะแนนเฉลี่ยวิชาคณิตศาสตร์ ร้อยละ 25.29 และ 25.77 ตามลำดับ (กระทรวงศึกษาธิการ, 2564) ซึ่งต่ำกว่าคะแนนเฉลี่ยในระดับประเทศทุกปี ดังนั้นโรงเรียนควรเร่งพัฒนาการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์

จากการสัมภาษณ์ครูในกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 พบว่า นักเรียนส่วนมากไม่ชอบเรียนหน่วยการเรียนรู้ เรื่อง ระบบจำนวนจริง เป็นเนื้อหาหนึ่งในสาระจำนวนและพีชคณิต เพราะคิดว่ายากเนื่องจากมีทฤษฎีทางคณิตศาสตร์ ถึงแม้ว่านักเรียนจะสามารถหาคำตอบได้แต่ให้อธิบายหรือแสดงการพิสูจน์ข้อความทางจำนวนและพีชคณิต นักเรียนจะไม่สามารถอธิบายที่ไปที่มาของคำตอบที่ได้ ดังนั้นครูจะต้องมีวิธีการพัฒนากระบวนการเรียนรู้ที่ครูสามารถจัดได้หลายรูปแบบตามความเหมาะสมกับเนื้อหาเหมาะสมกับนักเรียน และจุดประสงค์การเรียนรู้ที่ตั้งไว้

จากปัญหาดังกล่าวจึงมีความสนใจที่จะวิจัยความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนกาฬสินธุ์พิทยาสรรพ์ เพื่อเป็นแนวทางในการพัฒนานักเรียนให้มีความพร้อมด้านการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ระบบจำนวนจริง ต่อไป

วัตถุประสงค์การวิจัย

1. เพื่อศึกษาความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนกาฬสินธุ์พิทยาสรรพ์
2. เพื่อเสนอแนวทางการพัฒนาความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนกาฬสินธุ์พิทยาสรรพ์

วิธีดำเนินการวิจัย

1. ประชากรและกลุ่มตัวอย่าง

ประชากรที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ ได้แก่ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4/3 โรงเรียนกาฬสินธุ์พิทยาสรรพ์ อำเภอเมือง จังหวัดกาฬสินธุ์ ในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2564 ซึ่งมีนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ห้องเรียนวิทย์ – คณิต 10 ห้อง จำนวน 400 คน ประกอบด้วย นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4/1 – 4/10 นักเรียนมีความสามารถทางการเรียนแบบละเอียดความสามารถ และลักษณะห้องเรียนมีลักษณะคล้ายกัน

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ ได้แก่ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4/7 โรงเรียนกาฬสินธุ์พิทยาสรรพ์ ในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2564 จำนวน 40 คน นักเรียนมีความสามารถทางการเรียนแบบละเอียดความสามารถ ซึ่งได้มาจากการสุ่มแบบกลุ่ม (Cluster Random Sampling)

2. เครื่องมือที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูล

1. แบบทดสอบความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ระบบจำนวนจริง เป็นแบบทดสอบแบบอัตนัย จำนวน 10 ข้อ ใช้เวลาในการทำแบบทดสอบ 1 ชั่วโมง 40 นาที
2. แบบสัมภาษณ์สัมภาษณ์ถึงโครงสร้าง จำนวน 3 ข้อ

3. การเก็บรวบรวมข้อมูล

1. ขออนุญาตจากคณะกรรมการ เพื่อขอความอนุเคราะห์ในการเก็บรวบรวมข้อมูล และกำหนดวันเวลาในการดำเนินการเก็บรวบรวมข้อมูล
2. นำแบบทดสอบความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ไปใช้กับกลุ่มตัวอย่าง จำนวน 40 คน เพื่อชี้แจงวัตถุประสงค์ของการวิจัย บทบาทหน้าที่ของกลุ่มตัวอย่าง ชี้แจงวัตถุประสงค์ของการทำแบบทดสอบความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ และขอความร่วมมือในการทำแบบทดสอบความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ด้วยความตั้งใจ เพื่อให้ได้ผลตามความเป็นจริง
3. ทำการทดสอบความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์กับกลุ่มตัวอย่าง จำนวน 40 คน โดยใช้แบบทดสอบความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ จำนวน 10 ข้อ ใช้เวลา 1 ชั่วโมง 40 นาที
4. สัมภาษณ์ผู้ทรงคุณวุฒิ 3 ท่าน เพื่อหาแนวทางการพัฒนาความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4
5. ทำการรวบรวมข้อมูลและนำแบบทดสอบความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ที่นักเรียนได้เขียนตอบแล้ว นำผลจากการทำแบบทดสอบไปวิเคราะห์ จะทำให้ผู้วิจัยทราบว่านักเรียนคนนั้นมีความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์อยู่ในระดับใด วิธีการให้คะแนนแบบทดสอบความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ เมื่อนักเรียนเขียนตอบคำถามแต่ละข้อผู้วิจัยตรวจให้คะแนน

6. นำคะแนนจากแบบทดสอบความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ระบบจำนวนจริง โดยจำแนกตามระดับความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ แบ่งได้ 3 ระดับ คือ ระดับอ่อน ปานกลาง และเก่ง

4. การวิเคราะห์ข้อมูลและสถิติที่ใช้

1. วิเคราะห์ความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โดยใช้ความถี่ ร้อยละ ค่าเฉลี่ย และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน

2. วิเคราะห์ความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ซึ่งนำเสนอด้วยการวิเคราะห์เนื้อหา (Content analysis) การวิเคราะห์งานเขียน (Task Analysis) และการบรรยายเชิงวิเคราะห์ (Description Analysis)

3. วิเคราะห์การสัมภาษณ์ โดยสัมภาษณ์ผู้ทรงคุณวุฒิ เพื่อหาแนวทางการพัฒนาความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ซึ่งนำเสนอด้วยการวิเคราะห์เนื้อหา (Content Analysis) และการบรรยายเชิงวิเคราะห์ (Description Analysis)

ผลการวิจัย

1. ผลการศึกษาความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนกาฬสินธุ์พิทยาสรรพ์

ผู้วิจัยได้นำเสนอ จำนวนข้อ ค่าเฉลี่ยและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนแต่ละรายด้าน ดังตารางที่ 1 ความถี่ และร้อยละของคะแนน จากแบบทดสอบความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ระบบจำนวนจริง ดังตารางที่ 2 และลักษณะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ที่คลาดเคลื่อน จำนวนนักเรียนที่มีลักษณะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ที่คลาดเคลื่อนมากที่สุด ความถี่ และร้อยละ จากแบบทดสอบความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ระบบจำนวนจริง ดังตารางที่ 3

ตารางที่ 1 จำนวนข้อ ค่าเฉลี่ยและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนแต่ละด้าน จากแบบทดสอบความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ระบบจำนวนจริง

รายการ	จำนวนข้อ	คะแนนเต็ม	$\bar{x}$	<i>S.D.</i>
การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ระบบจำนวนจริง	10	40	20	14.14

จากตารางที่ 1 ผลการวิเคราะห์ข้อมูล พบว่า ความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ โดยรวมมีค่าเฉลี่ย และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน เท่ากับ 20 และ 14.14 ตามลำดับ

ตารางที่ 2 ความถี่ และร้อยละของคะแนนความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ โดยจำแนกตามระดับความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ จากแบบทดสอบความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ เรื่องระบบจำนวนจริง

ระดับความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์	คะแนนความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์	ความถี่	ร้อยละ
อ่อน	0 – 13	14	35
ปานกลาง	14 – 27	16	40
เก่ง	28 – 40	10	25

จากตารางที่ 2 ผลการวิเคราะห์ข้อมูล ความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 พบว่า คะแนนความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ 14 – 27 อยู่ในระดับปานกลาง (ร้อยละ 40) คะแนนความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ 0 – 13 อยู่ในระดับอ่อน (ร้อยละ 35) และคะแนนความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ 28 – 40 อยู่ในระดับเก่ง (ร้อยละ 25)

ตารางที่ 3 ลักษณะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ที่คลาดเคลื่อน จำนวนนักเรียนที่มีลักษณะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ที่คลาดเคลื่อนมากที่สุด ความถี่ และร้อยละ จากแบบทดสอบความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ระบบจำนวนจริง

ลักษณะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ที่คลาดเคลื่อน	จำนวนนักเรียนที่มีลักษณะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ที่คลาดเคลื่อนมากที่สุด	ความถี่	ร้อยละ
1. ขาดความรู้พื้นฐานในการพิสูจน์	11	41	27.5
2. ใช้หลักการในการทำไม่ถูกต้อง	14	45	35
3. ใช้การยกตัวอย่างแทนการพิสูจน์	8	36	20
4. ให้เหตุผลในการพิสูจน์ไม่ถูกต้อง	7	34	17.5

จากตารางที่ 3 ผลการวิเคราะห์ข้อมูล ลักษณะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ที่คลาดเคลื่อนของจำนวนนักเรียนที่มีลักษณะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ที่คลาดเคลื่อนมากที่สุด จำแนกออกเป็น 4 ลักษณะ ดังนี้ ใช้หลักการในการทำไม่ถูกต้อง 14 คน (ร้อยละ 35) ขาดความรู้พื้นฐานในการพิสูจน์ 11 คน (ร้อยละ 27.5) ใช้การยกตัวอย่างแทนการพิสูจน์ 8 คน (ร้อยละ 20) และให้เหตุผลในการพิสูจน์ไม่ถูกต้อง 7 คน (ร้อยละ 17.5)

2. ผลการศึกษาแนวทางการพัฒนาความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนกาฬสินธุ์พิทยาสรรพ์

ผลการศึกษาพฤติกรรมของนักเรียนที่มีคะแนนความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ 0 – 13 อยู่ในระดับอ่อน ดังตารางที่ 4

ตารางที่ 4 พฤติกรรมของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนกาฬสินธุ์พิทยาสรรพ์ ที่มีคะแนนความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ 0 – 13 อยู่ในระดับอ่อน

คะแนนความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์	พฤติกรรม
ระดับอ่อน (0 – 13)	1) นักเรียนไม่สามารถแสดงวิธีการพิสูจน์ได้ 2) นักเรียนยังขาดความรู้ในเนื้อหา ไม่มีความรู้พื้นฐาน และไม่สามารถนำมาแสดงวิธีการพิสูจน์ได้ 3) นักเรียนจะแสดงวิธีการพิสูจน์ตามความคิดของตนเอง โดยไม่ทราบว่าสิ่งที่ตนเองเขียนนั้นจะถูกหรือผิด 4) นักเรียนยังขาดการใช้สมบัติ ทฤษฎีบท และบทนิยามประกอบได้

จากตารางที่ 4 พฤติกรรมของนักเรียนที่มีคะแนนความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ 0 – 13 อยู่ในระดับอ่อน พบว่า นักเรียนไม่สามารถแสดงวิธีการพิสูจน์ได้ ยังขาดความรู้ในเนื้อหา ไม่มีความรู้พื้นฐาน และไม่สามารถนำมาแสดงวิธีการพิสูจน์ นักเรียนจะแสดงวิธีการพิสูจน์ตามความคิดของตนเอง โดยไม่ทราบว่าสิ่งที่ตนเองเขียนนั้นจะถูกหรือผิด และยังขาดการใช้สมบัติ ทฤษฎีบท และบทนิยามประกอบได้

ผลการศึกษาแนวทางการพัฒนาความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่มีคะแนนความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ 0 – 13 อยู่ในระดับอ่อน ดังตารางที่ 5

ตารางที่ 5 แนวทางการพัฒนาความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนกาฬสินธุ์พิทยาสรรพ์ ที่มีคะแนนความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ 0 – 13 อยู่ในระดับอ่อน

คะแนนความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์	แนวทางการพัฒนาความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ระดับอ่อน – ระดับปานกลาง
ระดับอ่อน (0 – 13)	ครูควรให้นักเรียนได้มีการพูด อธิบายการแสดงวิธีการพิสูจน์โดยใช้สมบัติ ทฤษฎีบท และบทนิยามประกอบของตนเองกับครู และให้นักเรียนฝึกทำแบบฝึกหัดสม่ำเสมอ สร้างแรงจูงใจ บรรยากาศที่ให้นักเรียนมีความกระตือรือร้นและสนใจเรียน มีการพัฒนาตนเองในการเรียนการสอนครูควรแสดงตัวอย่างวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์อย่างละเอียด ทำให้นักเรียนมีความคุ้นชินในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของครู การจัดการเรียนการสอนโดยให้นักเรียนแสดงวิธีการพิสูจน์ของตนเอง มีความหลากหลายวิธีการให้นักเรียนเข้าใจง่าย มีความหลากหลาย ในการเรียนเนื้อหาที่ซับซ้อนครูต้องเขียนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์อย่างละเอียด และที่มาที่ไปของวิธีทำให้ชัดเจน และจะต้องให้นักเรียนมีส่วนร่วมในการจัดการเรียนรู้อภิปรายโต้ตอบกันและแสดงวิธีการพิสูจน์ได้ด้วยตนเอง

จากตารางที่ 5 แนวทางการพัฒนาความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนกาฬสินธุ์พิทยาสรรพ์ ที่มีคะแนนความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ 0 – 13 อยู่ในระดับอ่อน พบว่า ครูควรให้นักเรียนได้มีการพูด อธิบายการแสดงวิธีการพิสูจน์ ให้นักเรียนฝึกทำแบบฝึกหัดสม่ำเสมอ สร้างแรงจูงใจ บรรยากาศที่ให้นักเรียนมีความกระตือรือร้นและสนใจเรียน ในการเรียนการสอนครูควรแสดงตัวอย่างวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์อย่างละเอียด และที่มาที่ไปของวิธีทำให้ชัดเจน เชื่อมโยงความรู้เก่ามาหาความรู้ใหม่ และเมื่อจะขึ้นเรื่องใหม่ ก็ต้องใส่ฐานของเรื่องใหม่ เช่น

สมบัติ ทฤษฎีบท และบทนิยาม และจะต้องให้นักเรียนมีส่วนร่วมในการจัดการเรียนรู้การอภิปรายโต้ตอบกันและแสดงวิธีการพิสูจน์ได้ด้วยตนเอง

ผลการศึกษาพฤติกรรมของนักเรียนที่มีคะแนนความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ 14 – 27 อยู่ในระดับปานกลาง ดังตารางที่ 6

ตารางที่ 6 พฤติกรรมของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนกาฬสินธุ์พิทยาสรรพ์ ที่มีคะแนนความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ 14 – 27 อยู่ในระดับปานกลาง

คะแนนความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์	พฤติกรรม
ระดับปานกลาง (14 – 27)	1) นักเรียนสามารถแสดงวิธีการพิสูจน์ได้บางส่วน 2) นักเรียนยังขาดการใช้สมบัติ ทฤษฎีบท และบทนิยามประกอบ ได้คำตอบมาได้ อย่างไร 3) นักเรียนสามารถแสดงวิธีการพิสูจน์ได้ถูกต้อง แต่ยังเขียนสมบัติ ทฤษฎีบท และบท นิยามประกอบยังไม่สมบูรณ์

จากตารางที่ 6 พฤติกรรมของนักเรียนที่มีคะแนนความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ 14 – 27 อยู่ในระดับปานกลาง พบว่า นักเรียนสามารถแสดงวิธีการพิสูจน์ได้บางส่วน นักเรียนยังขาดการใช้สมบัติ ทฤษฎีบท และบทนิยามประกอบ ได้คำตอบมาได้หรือไม่ และนักเรียนสามารถแสดงวิธีการพิสูจน์ได้ถูกต้อง แต่ยังเขียนสมบัติ ทฤษฎีบท และบทนิยามประกอบยังไม่สมบูรณ์

ผลการศึกษาแนวทางการพัฒนาความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ที่มีคะแนนความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ 14 – 27 อยู่ในระดับปานกลาง ดังตารางที่ 7

ตารางที่ 7 แนวทางการพัฒนาความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนกาฬสินธุ์พิทยาสรรพ์ ที่มีคะแนนความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ 14 – 27 อยู่ในระดับปานกลาง

คะแนนความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์	แนวทางการพัฒนาความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ระดับปานกลาง – ระดับเก่ง
ระดับปานกลาง (14 – 27)	การเรียนเนื้อหาที่ซับซ้อนครูต้องเขียนวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์อย่างละเอียด และ ที่มาที่ไปของวิธีทำให้ชัดเจน การจัดการเรียนการสอนที่หลากหลาย โดยใช้โครงสร้าง ทางคณิตศาสตร์เป็นพื้นฐาน จะช่วยให้นักเรียนสามารถอธิบายวิธีการพิสูจน์ต่าง ๆ ออกมาได้ชัดเจน และมีวิธีการพิสูจน์โดยใช้หลักการคณิตศาสตร์มาใช้ และจะต้องให้ นักเรียนฝึกฝนโดยแสดงวิธีการพิสูจน์ได้ด้วยตนเองเพื่อให้นักเรียนเกิดทักษะและ กระบวนการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ และให้นักเรียนใช้สมบัติ และทฤษฎีบท และบท นิยามประกอบในการแสดงวิธีการพิสูจน์ นักเรียนจะรู้ถึงสิ่งที่เป็นความคิด เป็นแนวทาง ที่ช่วยในการพิสูจน์ และการตัดสินใจถูกต้องของวิธีการคิด ครูส่งเสริมนักเรียนโดย การพูดคุย ข้อซักถาม และการอภิปราย นักเรียนจะแสดงให้เห็นถึงการใช้สมบัติ ทฤษฎี บท และบทนิยามประกอบของตนเองกับผู้อื่น การพัฒนาความสามารถในการพิสูจน์ สามารถทำควบคู่ไปกับการสอนได้ทุกเรื่องโดยจัดกิจกรรมให้นักเรียนได้คิดเองมากขึ้น เช่น จัดให้มีการอภิปราย ถามให้นักเรียนเล่าความคิด ชี้แจงเหตุผลประกอบ ซึ่งเป็น การแสดงวิธีการพิสูจน์อย่างง่าย ๆ เพื่อให้นักเรียนทำความเข้าใจให้แจ่มชัดขึ้น

จากตารางที่ 7 แนวทางการพัฒนาความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนกาฬสินธุ์พิทยาสรรพ์ ที่มีคะแนนความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ 14 – 27 อยู่ในระดับปานกลาง พบว่า การจัดการเรียนการสอนที่หลากหลาย โดยใช้โครงสร้างทางคณิตศาสตร์เป็นพื้นฐาน จะช่วยให้นักเรียนสามารถอธิบายวิธีการพิสูจน์ต่าง ๆ ออกมาได้ชัดเจน และจะต้องให้นักเรียนฝึกฝนโดยแสดงวิธีการพิสูจน์ได้ด้วยตนเองเพื่อให้นักเรียนเกิดทักษะและกระบวนการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ครูส่งเสริมนักเรียนโดยการพูดคุย ข้อซักถาม และการอภิปราย นักเรียนจะแสดงให้เห็นถึงการใช้สมบัติ ทฤษฎีบท และบทนิยามประกอบของตนเองกับผู้อื่น และมีโอกาสในการเพิ่มความเข้าใจในเนื้อหาทาง

คณิตศาสตร์ การพัฒนาความสามารถในการพิสูจน์ สามารถทำควบคู่ไปกับการสอนได้ทุกเรื่องโดยจัดกิจกรรมให้นักเรียนได้คิด
เองมากขึ้น เช่น จัดให้มีการอภิปราย ถามให้นักเรียนเล่าความคิด ชี้แจงเหตุผลประกอบ

ผลการศึกษาพฤติกรรมของนักเรียนที่มีคะแนนความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ 28 – 40 อยู่ในระดับเก่
ดังตารางที่ 8

ตารางที่ 8 พฤติกรรมของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนกาฬสินธุ์พิทยาสรรพ์ ที่มีคะแนนความสามารถในการพิสูจน์
ทางคณิตศาสตร์ 28 – 40 อยู่ในระดับเก่

คะแนนความสามารถใน การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์	พฤติกรรม
ระดับเก่ (28 – 40)	1) นักเรียนสามารถแสดงวิธีการพิสูจน์ได้ชัดเจน สมบูรณ์ คำตอบถูกต้อง และใช้สมบัติ ทฤษฎีบท และบทนิยามได้ถูกต้อง 2) นักเรียนใช้สมบัติ ทฤษฎีบท และบทนิยามประกอบ ว่ามีขั้นตอนแสดงวิธีการพิสูจน์ได้ อย่างไร และมีความหลากหลายในการนำเอาความรู้ หลักการ พื้นฐานทางคณิตศาสตร์ นำมาเขียนการพิสูจน์ได้ชัดเจน สมบูรณ์

จากตารางที่ 8 พฤติกรรมของนักเรียนที่มีคะแนนความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ 28 – 40 อยู่ในระดับเก่
พบว่า นักเรียนสามารถแสดงวิธีการพิสูจน์ได้ สมบูรณ์ และใช้สมบัติ ทฤษฎีบท และบทนิยามได้ถูกต้อง และนักเรียนใช้สมบัติ
ทฤษฎีบท และบทนิยามประกอบ ว่ามีขั้นตอนแสดงวิธีการพิสูจน์ได้อย่างไร และมีความหลากหลายในการนำเอาความรู้
หลักการ พื้นฐานทางคณิตศาสตร์นำมาเขียนการพิสูจน์ได้ชัดเจน สมบูรณ์

ผลการศึกษาแนวทางการพัฒนาความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ที่มีคะแนนความสามารถในการพิสูจน์ทาง
คณิตศาสตร์ 28 – 40 อยู่ในระดับเก่ อยู่ในระดับปานกลาง ดังตารางที่ 9

ตารางที่ 9 แนวทางการพัฒนาความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนกาฬสินธุ์
พิทยาสรรพ์ ที่มีคะแนนความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ 28 – 40 อยู่ในระดับเก่

คะแนนความสามารถใน การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์	แนวทางการพัฒนาความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ระดับเก่
ระดับเก่ (28 – 40)	ครูจัดการเรียนการสอนที่หลากหลายโดยใช้โครงสร้างทางคณิตศาสตร์เป็นพื้นฐาน จะ ช่วยให้นักเรียนสามารถอธิบายขั้นตอนต่าง ๆ ออกมาได้ชัดเจน และมีวิธีการหาคำตอบ โดยใช้หลักการคณิตศาสตร์มาใช้ และครูให้นักเรียนฝึกฝนโดยการทำแบบฝึกหัดอย่าง สม่ำเสมอและให้นักเรียนเขียนคำอธิบายหรือเหตุผลประกอบในการแสดงวิธีการพิสูจน์ ครูจะต้องพัฒนาศักยภาพของนักเรียนให้ดียิ่งขึ้น นักเรียนจะรู้ถึงสิ่งที่เป็ความคิด รู้ว่า ตนกำลังคิดอะไร และต้องการอะไรอันเป็นแนวทางที่ช่วยการพิสูจน์ข้อสรุป และการ ตัดสินใจถูกต้องของขั้นตอนการคิดได้ดียิ่งขึ้น

จากตารางที่ 9 แนวทางการพัฒนาความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียน
กาฬสินธุ์พิทยาสรรพ์ ที่มีคะแนนความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ 28 – 40 อยู่ในระดับเก่ พบว่า ครูจัดการเรียน
การสอนที่หลากหลายโดยใช้โครงสร้างทางคณิตศาสตร์เป็นพื้นฐาน และมีวิธีการหาคำตอบโดยใช้หลักการคณิตศาสตร์มาใช้
ครูจะต้องพัฒนาศักยภาพของนักเรียนให้ดียิ่งขึ้น

สรุปผลและอภิปรายผล

1. ผลการศึกษาความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 พบว่า นักเรียนมี
ความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์โดยรวมมีค่าเฉลี่ย เท่ากับ 20 และคะแนนความสามารถในการพิสูจน์ทาง
คณิตศาสตร์ 14 – 27 อยู่ในระดับปานกลาง (ร้อยละ 40) คะแนนความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ 0 – 13 อยู่ใน
ระดับอ่อน (ร้อยละ 35) และคะแนนความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ 28 – 40 อยู่ในระดับเก่ (ร้อยละ 25) ทั้งนี้
เนื่องจากนักเรียนมีความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ อยู่ในระดับปานกลาง สาเหตุเพราะนักเรียนมีความรู้พื้นฐาน
เกี่ยวกับการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ระบบจำนวนจริง ที่แตกต่างกัน โดยนักเรียนส่วนใหญ่จะมีพื้นฐานเกี่ยวกับการนำ

สมบัติ ทฤษฎีบท และบทนิยามต่าง ๆ ไปใช้ในการแสดงวิธีการพิสูจน์ได้บางส่วน และมีนักเรียนหลาย ๆ คนยังขาดการใช้สมบัติ ทฤษฎีบท และบทนิยามที่ไม่สมบูรณ์ นักเรียนมีความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ อยู่ในระดับอ่อน สาเหตุเพราะนักเรียนจะแสดงวิธีการพิสูจน์ตามความคิดของตนเอง ยังขาดความรู้ในเนื้อหา ไม่มีความรู้พื้นฐาน และไม่สามารถนำมาแสดงวิธีการพิสูจน์ และมีนักเรียนหลาย ๆ คนที่ไม่สามารถแสดงวิธีการพิสูจน์ได้ โดยไม่ทราบว่สิ่งที่ตนเองเขียนนั้นจะถูกหรือผิด และนักเรียนยังขาดการใช้สมบัติ ทฤษฎีบท และบทนิยาม และนักเรียนมีความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ อยู่ในระดับเก่ง สาเหตุเพราะนักเรียนสามารถแสดงวิธีการพิสูจน์ได้ชัดเจน สมบูรณ์ คำตอบถูกต้อง และใช้สมบัติ ทฤษฎีบท และบทนิยามได้ถูกต้อง ซึ่งนักเรียนสามารถแสดงวิธีการพิสูจน์ถูกต้อง มีความหลากหลายในการนำเอาความรู้ หลักการพื้นฐานทางคณิตศาสตร์นำมาเขียนการพิสูจน์ได้ชัดเจน สมบูรณ์ ซึ่งสอดคล้องกับ Moore (1990, p. 3) กล่าวว่า ในสภาพการณ์โดยทั่วไปพบว่า นักศึกษาเขียนการพิสูจน์ไม่ได้ ส่วนนักศึกษาก็เห็นว่าการศึกษาการพิสูจน์เป็นเรื่องยาก เมื่อนักเรียน กล่าวว่า เขาไม่เข้าใจคณิตศาสตร์ เขาไม่สามารถเขียนการพิสูจน์ได้ นั้นหมายความว่านักเรียนขาดความเข้าใจในบางเรื่อง แต่ก็ไม่รู้ว่าเป็นเรื่องใด อาจเป็นเรื่องความคิดรวบยอด ตรรกศาสตร์ การให้เหตุผล ภาษาทางคณิตศาสตร์ รูปแบบการพิสูจน์ หรือเป็นเรื่องอื่นใด ดังนั้นการที่ครูศึกษา และวินิจฉัยปัญหา หรืออุปสรรคในการเรียนการพิสูจน์ จะนำไปสู่การแก้ไขและพัฒนาความรู้ความเข้าใจในการพิสูจน์และการเรียนคณิตศาสตร์ให้บรรลุเป้าหมายสูงสุดได้ ซึ่งสอดคล้องกับ Hart (1986) กล่าวว่า ได้ทำการศึกษาเกี่ยวกับการเขียนบทพิสูจน์ของนักศึกษาที่เรียนทฤษฎีกลุ่มเบื้องต้น กลุ่มตัวอย่างเป็นนักศึกษาวิชาเอกคณิตศาสตร์ จำนวน 29 คนที่เรียน วิชาพีชคณิตนามธรรมชั้นสูงมาอย่างต่อเนื่องมากกว่า 3 รายวิชานี้ได้แบ่งระดับความเข้าใจนิยามเชิงปฏิบัติการ (Operationally Defined) ออกเป็น 4 ระดับ ได้แก่ ระดับก่อนความเข้าใจ ระดับความเข้าใจของโครงสร้างของประโยค ระดับความเข้าใจความหมายของคำ และประโยคในเชิงรูปธรรม และระดับความเข้าใจความหมายของคำและประโยคในเชิงรูปธรรม พบว่า โดยภาพรวมของกลุ่มตัวอย่างมีความเข้าใจความหมายโดยนัย (The Implications) ของความเข้าใจนิยามเชิงปฏิบัติการ แต่ยังมีปัญหาในเรื่องการอธิบายและการนำมาใช้ในการประยุกต์ และสอดคล้องกับ นวรัตน์ สุกสินธุ์ (2525, น. 1 – 3) กล่าวว่า การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องเซตและระบบจำนวน ของนิสิตที่ได้รับการสอนโดยเน้นการยกตัวอย่างค้ำกับการสอนปกติ พบว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนิสิตที่ได้รับการสอนโดยเน้นการยกตัวอย่างค้ำสูงกว่ากลุ่มที่ได้รับการสอนตามปกติที่ระดับนัยสำคัญทางสถิติ .01 พบว่า การสอนโดยเน้นการยกตัวอย่างค้ำช่วยให้ นิสิตสามารถทำความเข้าใจทฤษฎีบทในเรื่องเซตและระบบจำนวนได้เป็นอย่างดี และช่วยให้ นิสิตเข้าใจถึงความสำคัญของเงื่อนไขของบทนิยามและทฤษฎีบทสามารถนำบทนิยามและทฤษฎีบทต่าง ๆ ไปใช้อย่างถูกต้องรอบคอบและระมัดระวัง และลักษณะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ที่คลาดเคลื่อนของจำนวนนักเรียนที่มีลักษณะการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ที่คลาดเคลื่อนมากที่สุด จำแนกออกเป็น 4 ลักษณะ ดังนี้ ใช้หลักการในการทำไม่ถูกต้อง 14 คน (ร้อยละ 35) ขาดความรู้พื้นฐานในการพิสูจน์ 11 คน (ร้อยละ 27.5) ใช้การยกตัวอย่างแทนการพิสูจน์ 8 คน (ร้อยละ 20) และให้เหตุผลในการพิสูจน์ไม่ถูกต้อง 7 คน (ร้อยละ 17.5) ทั้งนี้เนื่องมาจากนักเรียนเข้าใจว่าการยกตัวอย่างคือการพิสูจน์ เพราะการยกตัวอย่างเป็นการนำสัญลักษณ์มาแทนค่าในสมการเพื่อให้ได้คำตอบซึ่งไม่ถูกต้อง นอกจากนี้ยังพบว่า นักเรียนไม่เข้าใจว่าการพิสูจน์จะต้องนำสมบัติ ทฤษฎีบท และบทนิยามต่าง ๆ มาสร้างความสัมพันธ์กับสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ แต่นักเรียนกำหนดสิ่งที่ไม่เกี่ยวข้องขึ้นมาเอง เพื่อใช้ในการแสดงวิธีการพิสูจน์ แต่สมบัติ ทฤษฎีบท และบทนิยามต่าง ๆ ที่นักเรียนนำมาใช้ในการพิสูจน์ไม่เกี่ยวข้องกับโจทย์ ซึ่งสอดคล้องกับ Movshovitz – hader et al. (1987, pp. 3 – 14) กล่าวว่า นักเรียนมีลักษณะความคลาดเคลื่อน 6 ด้าน คือ 1. ด้านการใช้ข้อมูลผิด 2. ด้านการตีความด้านภาษา 3. ด้านการอ้างอิงวิธีการคิดหาเหตุผลที่ไม่สมบูรณ์ 4. ด้านการบิดเบือนทฤษฎีบท กฎสูตร บทนิยาม และสมบัติ 5. ด้านขาดการตรวจสอบในระหว่างการแก้ปัญหา และ 6. ด้านข้อผิดพลาดในเทคนิคการทำ และสอดคล้องกับ Barcellos. (2005, pp. 98 – 114) กล่าวว่า ความคลาดเคลื่อนของนักเรียนในด้านการใช้บทนิยาม สมบัติ มีการใช้กฎที่ผิดลำดับขั้นตอน ทำให้นักเรียนไม่สามารถแก้ปัญหาได้

2. แนวทางการพัฒนาความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนกาฬสินธุ์พิทยาสรรพ์ พบว่า พฤติกรรมของนักเรียนที่มีคะแนนความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ 0 – 13 อยู่ในระดับอ่อน พบว่านักเรียนไม่สามารถแสดงวิธีการพิสูจน์ได้ ยังขาดความรู้ในเนื้อหา ไม่มีความรู้พื้นฐาน และไม่สามารถนำมาแสดงวิธีการพิสูจน์ นักเรียนจะแสดงวิธีการพิสูจน์ตามความคิดของตนเอง โดยไม่ทราบว่สิ่งที่ตนเองเขียนนั้นจะถูกหรือผิด และยังไม่สามารถใช้สมบัติ ทฤษฎีบท และบทนิยามประกอบได้ ทั้งนี้เนื่องมาจากนักเรียนใช้การจดจำวิธีการพิสูจน์ โดยขาดความเข้าใจและการใช้สมบัติ ทฤษฎีบท และบทนิยาม นักเรียนไม่ได้ลองใช้ความพยายามของตัวเองทำให้เข้าใจการพิสูจน์ได้ยาก เวลาว่างไม่ทบทวนเนื้อหา เมื่อนักเรียนไม่เข้าใจในการพิสูจน์ นักเรียนไม่ถามครูเพื่อไขข้อสงสัย แต่ปล่อยผ่าน เพราะทำให้สะสมความไม่เข้าใจไป

เรื่อย ๆ พฤติกรรมของนักเรียนที่มีคะแนนความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ 14 – 27 อยู่ในระดับปานกลาง พบว่า นักเรียนสามารถแสดงวิธีการพิสูจน์ได้บางส่วน นักเรียนยังขาดการใช้สมบัติ ทฤษฎีบท และบทนิยามประกอบ ได้คำตอบมาได้ อย่างไร และนักเรียนสามารถแสดงวิธีการพิสูจน์ได้ถูกต้อง แต่ยังใช้สมบัติ ทฤษฎีบท และบทนิยามประกอบยังไม่สมบูรณ์ ทั้งนี้ เนื่องจากนักเรียนจะเรียนแบบมองภาพเล็กไปหาภาพใหญ่ ไม่ได้พยายามทำความเข้าใจเนื้อหาคณิตศาสตร์ในภาพรวมก่อน แต่จะมองไปที่รายละเอียดในการพิสูจน์ของข้อนั้น ๆ ก่อน แล้วพยายามที่จะจำรายละเอียดของขั้นตอนเล็ก ๆ เหล่านั้นไปเรื่อย ๆ โดยหวังว่าจะเข้าใจทั้งหมดได้ ซึ่งนักเรียนยังขาดการนำเสนอสมบัติ ทฤษฎีบท และบทนิยามไปใช้ และพฤติกรรมของนักเรียนที่มี คะแนนความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ 28 – 40 อยู่ในระดับเก่ง พบว่า นักเรียนสามารถแสดงวิธีการพิสูจน์ได้ ชัดเจน สมบูรณ์ คำตอบถูกต้อง และใช้สมบัติ ทฤษฎีบท และบทนิยามได้ถูกต้อง และนักเรียนใช้สมบัติ ทฤษฎีบท และบท นิยามประกอบ ว่ามีขั้นตอนแสดงวิธีการพิสูจน์ได้อย่างไร และมีความหลากหลายในการนำเสนอความรู้ หลักการ พื้นฐานทาง คณิตศาสตร์นำมาเขียนการพิสูจน์ได้ชัดเจน สมบูรณ์ ทั้งนี้เนื่องจากนักเรียนมีความสามารถทางการคิด วิเคราะห์ สรุป ความคิด ใช้เหตุผล ปรับเปลี่ยนวิธีใหม่ ๆ มองการพิสูจน์ได้อย่างเหมาะสม นักเรียนมักจะมองเห็นวิธีการพิสูจน์ที่น่าสนใจอยู่ เสมอ ในขณะที่นักเรียนคนอื่นมองข้ามไป หรือมองไม่เห็นความน่าสนใจนั้น ๆ นักเรียนจะเรียนรู้วิธีการพิสูจน์ และสามารถ เอาชนะการพิสูจน์นั้นได้ ไม่คิดว่าการพิสูจน์นั้นยากหรือง่ายเกินไป นักเรียนจะเรียนรู้จากการคิด และลองทำดูโดยไม่มีปัจจัย อื่นเข้ามาเกี่ยวข้อง เช่น ความวิตกกังวล คำพูดของคนอื่น เป็นต้น สามารถทบทวนสิ่งที่ทำไป นักเรียนจะมีการตรวจสอบการ วิธีการพิสูจน์ของตนเองอย่างเป็นขั้นตอน เมื่อพบข้อผิดพลาดจะแก้ไขทันที หรือเมื่อได้รับข้อมูลใหม่ จะนำมาพิจารณา และ ปรับปรุงการพิสูจน์ให้ดีขึ้น จะมีการตรวจทานผลลัพธ์อยู่เสมอ ซึ่งสอดคล้องกับ กาญจนา สนธิโพธิ์ (2527, น. 1) กล่าวว่า เรื่องที่เป็นปัญหามากสำหรับนักเรียนที่เรียนวิชาเอกคณิตศาสตร์ คือ การพิสูจน์ นักเรียนไม่ทราบว่าจะเริ่มต้นการพิสูจน์ อย่างไร และ ไม่ทราบว่าจะดำเนินการพิสูจน์ไปในแนวทางใด จึงจะบรรลุถึงสิ่งที่ต้องการจะพิสูจน์ ซึ่งสอดคล้องกับคำกล่าว ของกรรณิกา คล่องกิจกุล (2527, น. 1 – 2) กล่าวว่า ปัญหาสำหรับนักเรียนคือ นักเรียนไม่สามารถพิสูจน์เองได้ เพราะไม่ ทราบแนวการพิสูจน์ นักเรียนไม่ทราบว่าเริ่มต้นการพิสูจน์อย่างไร ไม่สามารถเชื่อมโยงสิ่งที่มีอยู่แล้ว หรือสิ่งที่ทราบมาช่วย ในการพิสูจน์ และทำให้ประสบปัญหาในเรื่องการเลือกรูปแบบการพิสูจน์ Moore (1990, pp. 137 – 144) กล่าวว่า ในการ เรียนวิชาที่เป็นการพิสูจน์ นักเรียนมักประสบปัญหาใน การอ่านและการเขียนการพิสูจน์ ซึ่งสาเหตุที่ทำให้นักเรียนประสบ ปัญหาในการพิสูจน์ มีดังนี้ 1) นักเรียนไม่ทราบบทนิยาม นั่นคือ เขาไม่สามารถเขียนบทนิยามได้ 2) นักเรียนมีความรู้ความ เข้าใจเชิงสัญชาตญาณ (Intuitive) ในคณิตศาสตร์น้อย 3) ภาพลักษณ์โน้ตสัน (Concept Image) ของนักเรียนมีไม่ เพียงพอในการเขียนการพิสูจน์ 4) นักเรียนไม่สามารถหรือไม่มีความตั้งใจในการคิดและการใช้ตัวอย่างเพื่อช่วยในการพิสูจน์ 5) นักเรียนไม่ทราบว่าจะใช้บทนิยามในการแสดงให้เห็นโครงสร้างการพิสูจน์อย่างไร 6) นักเรียนไม่เข้าใจและไม่สามารถใช้ ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ 7) นักเรียนไม่ทราบว่าเริ่มต้นการพิสูจน์อย่างไร และมีแนวทางการพัฒนา ความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนกาฬสินธุ์พิทยาสรรพ์ ที่มีคะแนน ความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ 0 – 13 อยู่ในระดับอ่อน (จากระดับอ่อน ไประดับปานกลาง) พบว่า ครูควรให้ นักเรียนได้มีการพูด อธิบายการแสดงวิธีการพิสูจน์โดยเขียนสมบัติ ทฤษฎีบท และบทนิยามประกอบของตนเองกับครู เพื่อน ร่วมชั้น และให้นักเรียนฝึกทำแบบฝึกหัดสม่ำเสมอ สร้างแรงจูงใจ บรรยากาศที่ให้นักเรียนมีความกระตือรือร้นและสนใจเรียน มีการพัฒนาดตนเองในการเรียนการสอนครูควรแสดงตัวอย่างวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์อย่างละเอียด ทำให้นักเรียนมีความ คำนึงในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของครู การจัดการเรียนการสอนโดยให้นักเรียนแสดงวิธีการพิสูจน์ของตนเอง มีความ หลากหลายวิธีการให้นักเรียนเข้าใจง่าย มีความหลากหลาย ในการเรียนเนื้อหาที่ซับซ้อนครูต้องเขียนวิธีการพิสูจน์ทาง คณิตศาสตร์อย่างละเอียด และที่มาที่ไปของวิธีทำให้ชัดเจน เชื่อมโยงความรู้เก่ามาหาความรู้ใหม่ และเมื่อจะขึ้นเรื่องใหม่ ก็ ต้องใส่ฐานของเรื่องใหม่ เช่น สมบัติ ทฤษฎีบท และบทนิยาม และจะต้องให้นักเรียนมีส่วนร่วมในการจัดการเรียนรู้การ อภิปรายโต้ตอบกันและแสดงวิธีการพิสูจน์ได้ด้วยตนเอง แนวทางการพัฒนาความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนกาฬสินธุ์พิทยาสรรพ์ ที่มีคะแนนความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ 14 – 27 อยู่ในระดับปานกลาง (จากระดับปานกลาง ไประดับเก่ง) พบว่า การเรียนเนื้อหาที่ซับซ้อนครูต้องเขียนวิธีการพิสูจน์ทาง คณิตศาสตร์อย่างละเอียด และที่มาที่ไปของวิธีทำให้ชัดเจน การจัดการเรียนการสอนที่หลากหลาย โดยใช้โครงสร้างทาง คณิตศาสตร์เป็นพื้นฐาน จะช่วยให้นักเรียนสามารถอธิบายวิธีการพิสูจน์ต่าง ๆ ออกมาได้ชัดเจน และมีวิธีการพิสูจน์โดยใช้ หลักการคณิตศาสตร์มาใช้ และจะต้องให้นักเรียนฝึกฝนโดยแสดงวิธีการพิสูจน์ได้ด้วยตนเองเพื่อให้นักเรียนเกิดทักษะและ กระบวนการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ และให้นักเรียนเขียนสมบัติ และทฤษฎีบท และบทนิยามประกอบในการแสดงวิธีการ

พิสูจน์ นักเรียนจะรู้ถึงสิ่งที่เป็นความคิด เป็นแนวทางที่ช่วยในการพิสูจน์ และการตัดสินใจความต้องการของวิธีการคิด ครูส่งเสริมนักเรียนโดยการพูดคุย ข้อซักถาม และการอภิปราย นักเรียนจะแสดงให้เห็นถึงการเขียนสมบัติ ทฤษฎีบท และบทนิยามประกอบของตนเองกับผู้อื่น และมีโอกาสในการเพิ่มความเข้าใจในเนื้อหาทางคณิตศาสตร์ ครูควรตระหนักว่าเป้าหมายนั้นมีความสำคัญคุณค่าในการเรียนของนักเรียน การพัฒนาความสามารถในการพิสูจน์ สามารถทำควบคู่ไปกับการสอนได้ทุกอย่าง โดยจัดกิจกรรมให้นักเรียนได้คิดเองมากขึ้น เช่น จัดให้มีการอภิปราย ถามให้นักเรียนเล่าความคิด ชี้แจงเหตุผลประกอบ ซึ่งเป็นการแสดงวิธีการพิสูจน์อย่างง่าย ๆ เพื่อให้นักเรียนทำความเข้าใจให้แจ่มชัดขึ้น ทั้งนี้เนื่องมาจากการพื้นฐานการเรียนรู้ และความสามารถของนักเรียนแต่ละบุคคลแตกต่างกัน นักเรียนมีความรู้พื้นฐาน และทักษะพื้นฐานไม่เพียงพอ ซึ่งควรที่จะพัฒนาความสามารถในการพิสูจน์เกี่ยวกับระบบจำนวนจริง ให้อยู่ในระดับที่สูงขึ้น ครูจัดการเรียนการสอนที่หลากหลายโดยใช้โครงสร้างทางคณิตศาสตร์เป็นพื้นฐาน จะช่วยให้นักเรียนสามารถแสดงการพิสูจน์ต่าง ๆ ออกมาได้ชัดเจน และใช้สมบัติทฤษฎีบท และบทนิยามประกอบในการหาคำตอบ นักเรียนจะรู้ถึงสิ่งที่เป็นความคิด รู้ว่าตนกำลังคิดอะไร และต้องการอะไร เป็นแนวทางที่ช่วยการพิสูจน์ข้อสรุป และการตัดสินใจความต้องการของขั้นตอนการคิด ครูส่งเสริมนักเรียนโดยการพูดคุย ข้อซักถาม และการอภิปรายนักเรียนจะแสดงให้เห็นถึงเหตุผลตนเอง และให้นักเรียนได้พบปัญหาที่นักเรียนสนใจ และไม่ยากเกินความสามารถในการคิดและการให้เหตุผล โดยครูสนับสนุนให้นักเรียนมีการแลกเปลี่ยนความคิด ชี้แจงเหตุผล และแก้ปัญหา ร่วมกันอย่างเหมาะสม ครูควรตระหนักว่าเป้าหมายนั้นมีความสำคัญ มีคุณค่าในชีวิตของนักเรียน การพัฒนาความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ สามารถทำควบคู่ไปกับการสอน เพื่อให้นักเรียนทำความเข้าใจให้แจ่มชัดขึ้น และปรับแต่งแนวคิดได้อย่างมีเหตุผล และแนวทางการพัฒนาความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนกาฬสินธุ์พิทยาสรรพ์ ที่มีคะแนนความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ 28 – 40 อยู่ในระดับเก่ง พบว่า ครูจัดการเรียนการสอนที่หลากหลายโดยใช้โครงสร้างทางคณิตศาสตร์เป็นพื้นฐาน จะช่วยให้นักเรียนสามารถอธิบายขั้นตอนต่าง ๆ ออกมาได้ชัดเจน และมีวิธีการหาคำตอบโดยใช้หลักการคณิตศาสตร์มาใช้ และครูให้นักเรียนฝึกฝนโดยการทำแบบฝึกหัดอย่างสม่ำเสมอ และให้นักเรียนเขียนคำอธิบายหรือเหตุผลประกอบในการแสดงวิธีการพิสูจน์ ครูจะต้องพัฒนาศักยภาพของนักเรียนให้ดียิ่งขึ้น นักเรียนจะรู้ถึงสิ่งที่เป็นความคิด รู้ว่าตนกำลังคิดอะไร และต้องการอะไรอันเป็นแนวทางที่ช่วยการพิสูจน์ข้อสรุป และการตัดสินใจความต้องการของขั้นตอนการคิดได้ดียิ่งขึ้น ซึ่งสอดคล้องกับ อัมพร ม้าคะนอง (2558, น. 48) กล่าวว่า การแก้ปัญหาเป็นทักษะที่มีความสำคัญยิ่งที่รวมทักษะอื่น ๆ ที่สำคัญไว้ด้วย เช่น การให้เหตุผล การสื่อสาร และการตัดสินใจ ผู้ที่มีทักษะการแก้ปัญหาที่ดี มักจะมีความรู้ประสบการณ์ ระบบการคิด และการตัดสินใจที่ดีพอ เนื่องจากการแก้ปัญหาเป็นกระบวนการที่ซับซ้อน และเกี่ยวข้องกับความรู้ ทักษะ และความสามารถหลายอย่างความรู้ในเนื้อหา ความรู้เกี่ยวกับขั้นตอนการทำงาน ความสามารถในการคิด และความสามารถในการประเมินการทำงานของตนเอง นอกจากนี้ครูควรพัฒนาการจัดการเรียนการสอนให้มีความหลากหลาย จะต้องให้นักเรียนมีส่วนร่วมในการจัดการเรียนรู้และคิดได้เองมีอิสระทางความคิด การอภิปรายโต้ตอบกัน และสอดคล้องกับ Courtney Erin Driggs Lark (2015, pp. 248 – 254) กล่าวว่า การที่ครูส่งเสริมนักเรียนในการพูดคุยทางคณิตศาสตร์อย่างมีความหมายจะช่วยให้เด็กสร้างข้อโต้แย้งและวิจารณ์การให้เหตุผลของผู้อื่น นักเรียนจะแสดงให้เห็นถึงเหตุผลตนเอง ขณะสื่อสารกับผู้อื่นและมีโอกาสในการเพิ่มความเข้าใจในบทสนทนาและเนื้อหาทางคณิตศาสตร์ได้ลึกซึ้งมากขึ้น

ข้อเสนอแนะ

ข้อเสนอแนะในการนำผลวิจัยไปใช้หรือข้อเสนอแนะเชิงนโยบาย

1. ควรพัฒนาความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ระบบจำนวนจริง ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4
2. ควรพัฒนาความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่มีคะแนนความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์อยู่ในระดับอ่อน และปานกลาง

ข้อเสนอแนะในการวิจัยต่อไป

1. ควรศึกษาแนวทางการพัฒนาความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน เพื่อให้ทราบถึงสิ่งที่ส่งผลต่อระดับการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ และอาจสามารถนำแนวทางการพัฒนาความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนต่อไป
2. ควรศึกษาความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ตามเนื้อหาของแต่ละระดับชั้น เพื่อให้ครอบคลุมในทุกรูปแบบของการพิสูจน์ และทุกระดับชั้น

เอกสารอ้างอิง

- กรรณิกา คล่องกิจกุล. (2527). *การศึกษาประสิทธิภาพแบบเรียนที่เน้นการวิเคราะห์กระบวนการคิด เรื่องฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้*. ปริญญาโท กศ.ม. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร.
- กาญจนา สนธิโพธิ์. (2527). *การศึกษาประสิทธิภาพแบบเรียนที่เน้นการวิเคราะห์กระบวนการคิด เรื่องลิมิตของฟังก์ชัน*. ปริญญาโท กศ.ม. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร.
- ธนพร พฤษะวัน. (2560). *การศึกษาความสามารถและปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษา หลักสูตรศึกษาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยสวนดุสิต*.
- นวรรตน์ สุภสินธุ์. (2525). *การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนิสิตระดับปริญญาตรีปีที่ 1 เรื่องเซตและระบบจำนวน โดยการสอนที่เน้นการยกตัวอย่างค้ำกับการสอนปกติ*. ปริญญาโท กศ.ม. (คณิตศาสตร์). กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.
- ประเสริฐ เสียงดี. (2527). *การศึกษาปรัชญาทางคณิตศาสตร์และการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์*. วิทยานิพนธ์ วท.ม. เชียงใหม่ : มหาวิทยาลัยเชียงใหม่.
- พิชกร แปลงประสพโชค. (2518). *การศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียนโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ของ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น*. ปริญญาโท กศ.ม. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร.
- ยุพิน พิพิธกุล. (2545). *การสอนคณิตศาสตร์*. กรุงเทพฯ : คณะครุศาสตร์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- อัมพร ม้าคะนอง. (2558). *ครูคณิตศาสตร์สำหรับมัธยมศึกษา*. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- กระทรวงศึกษาธิการ. (2564). *การทดสอบทางการศึกษาแห่งชาติขั้นพื้นฐาน*. จาก <https://www.niets.or.th>
- American Heritage Dictionary. (2005). *Science Dictionary*. Boston, MA : Houghton Mifflin Company.
- Barcellos, A. (2005). *Mathematics Misconceptions of College – age Algebra Students*. Unpublished Doctoral Dissertation, University of California, Davis.
- Courtney Erin Driggs Lark (2015). *Identifying pioneers of tomorrow: a study of the relationship between middle school students' innovator skills and stem interests*. (Creighton University in Partial Fulfillment of the Requirements for the degree of Doctor).
- Hart, Eric W. (1986). *An Exploratory Study of The Proof – Writing Performance of College Students in Elementary Group Theory*. (Online). Available : <http://dbonline.lib.cmu.ac.th/dao/detail.nsp>
- Hersh, R. (1993). "Proving is Convincing and Explaining," *Educational Studies in Mathematics*. 24(4) : 389 – 399.
- Markel. W. D. (1994). "The Role of Proof in Mathematics Education," *School Science and Mathematics*. 94(6) : 291 – 295.
- Moore, Robert Crumley. (1990). *College Students' Difficulties in Learning to Do Mathematics Proofs*. Ed.D. Athens : The University of Georgia. Photocopied, 1990.
- Movahovitz – Hadar, N., O. Zaslavsky and S. Inbar. (1987). *Analyzing and Modeling Arithmetic*. Journal for Research in Mathematic Education. 18(1).
- Saeed, R. M. (1997). *An Exploratory Study of College Students' Understanding of Mathematical Proof and Relationship of this Understanding to their Attitude Mathematics*. Dissertation abstract 57(10) : 4300 – A.
- Solow, D. (2002). *How to Read and Do Proofs*. New York : John Wiley and Sons Inc.